

PROBLEMA 1.

$$f(x) = ax^2 - x + b \quad g(x) = (ax+b) e^{2x-x^2}$$

$a \neq 0$ PUNTO 1.

Notiamo che

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (ax+b) e^{2x-x^2} = 0. \quad \text{per confronto di ordini.}$$

In fatti l'esponentiale è sempre più veloce del polinomio e considerato che $e^{-\infty} = 0$ tutto il limite va a 0.

Inoltre

$$\begin{aligned} g'(x) &= a e^{2x-x^2} + (ax+b)(2-2x)e^{2x-x^2} = \\ &= e^{2x-x^2} [2ax+2b-2ax^2-2bx+a] = \\ &= e^{2x-x^2} [-2ax^2+2x(a-b)+2b+a] \geq 0. \end{aligned}$$

$$e^{2x-x^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$-2ax^2 + 2x(a-b) + 2b+a \geq 0$$

$$-2ax^2 + 2x(a-b) + 2b+a = 0$$

$$\Delta = (a-b)^2 + 4ab + 2a^2 = 3a^2 + 2ab + b^2 = 2a^2 + (a+b)^2 \geq 0$$

Dunque la derivata prima si annulla in

due punti ^{distinti} che risultano essere il massimo e il minimo assoluto appunto.

Le due funzioni si devono intersecare in $A(2,1)$ quindi A deve appartenere al grafico di entrambe le funzioni.

Dunque

$$\begin{cases} f(2)=1 \\ g(2)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a-2+b=1 \\ (2a+b)e^0=1 \end{cases} \begin{cases} b=3-4a \\ (2a+b)=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=3-4a \\ 2a+3-4a=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -2a &= -2 & \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \\ a &= 1 \end{aligned}$$

$$f(x) = x^2 - x + 1 \quad g(x) = (x-1)e^{2x-x^2}$$

PUNTO 2.

$f(x) = x^2 - x + 1$
è una parabola
con vertice in

$V\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$; fuoco in

$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1-5}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$

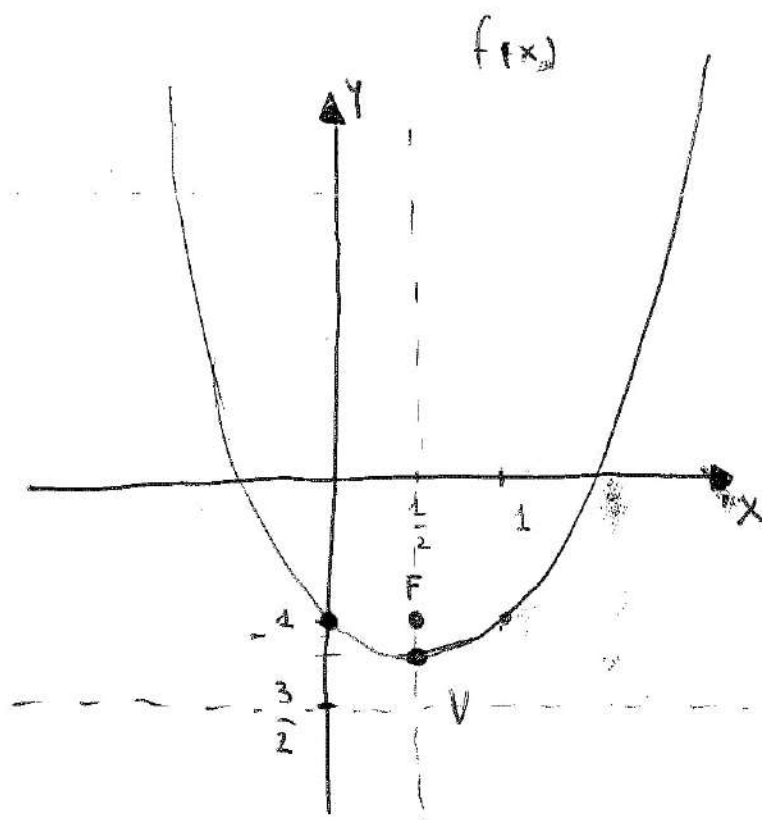
asse di simmetria:

$$x = \frac{1}{2}$$

e direttrice

$$y = -\frac{5+1}{4} = -\frac{6}{4}$$

$$y = -\frac{3}{2}$$



$$g(x) = (x-1)e^{2x-x^2}$$

g è definita in tutto $\mathbb{R}$.

Dato che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$$

allora

$y=0$ è ASINTOTO ORIZZONTALE.

La funzione interseca

l'asse y nel punto $(0, -1)$

e l'asse x in $(1; 0)$

$$(x-1)e^{2x-x^2} > 0$$

sempre positive.

Quindi studi $x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$

$g(x)$ è positiva per $x > 1$.

$g(x)$ è negativa per $x < 1$.

$$g'(x) = e^{2x-x^2}(-2x^2+4x-1) > 0$$

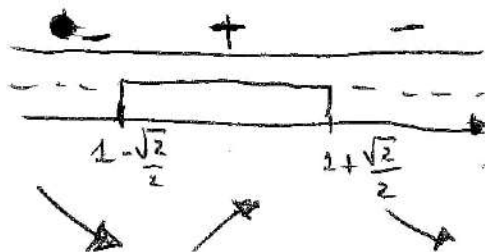
$$e^{2x-x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-2x^2+4x-1 > 0$$

$$2x^2-4x+1 < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

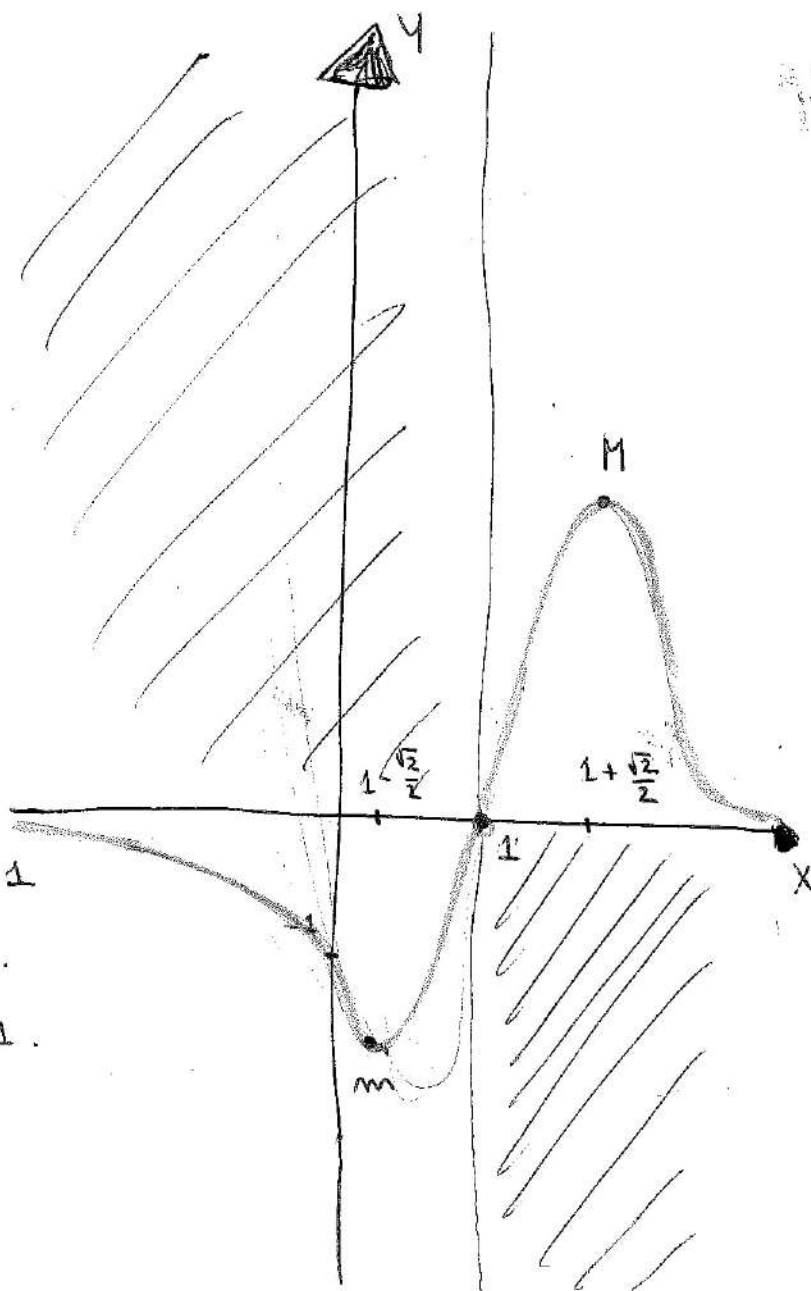
$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$



g ammette minimo

in $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

e massimo in $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Notando dal grafico che il punto $(1, 0)$ è un eventuale punto di simmetria; calcoliamo

$$g(2 \cdot 1 - x) = g(2 - x) = (2 - x - 1) e^{2(2-x) - (2-x)^2} =$$

Dato che
ho utilizzato
la trasformazione
 $x = 2x_p - x$
 $y = 2y_p - y$

$$= (1 - x) e^{4 - 2x + 4x - 4 - x^2} = (1 - x) e^{2x - x^2} =$$

$$= -(x - 1) e^{2x - x^2} = -g(x).$$

Quindi questo dimostra che $(1, 0)$ è un centro di simmetria per la funzione $g(x)$.

Per dimostrare che f e g sono tangenti in $B(0, -1)$ mostriamo che il coefficiente angolare delle rette tangenti alle curve in tale punto è lo stesso, quindi che le due funzioni hanno stessa retta tangente nel punto B .

Allora calcolo

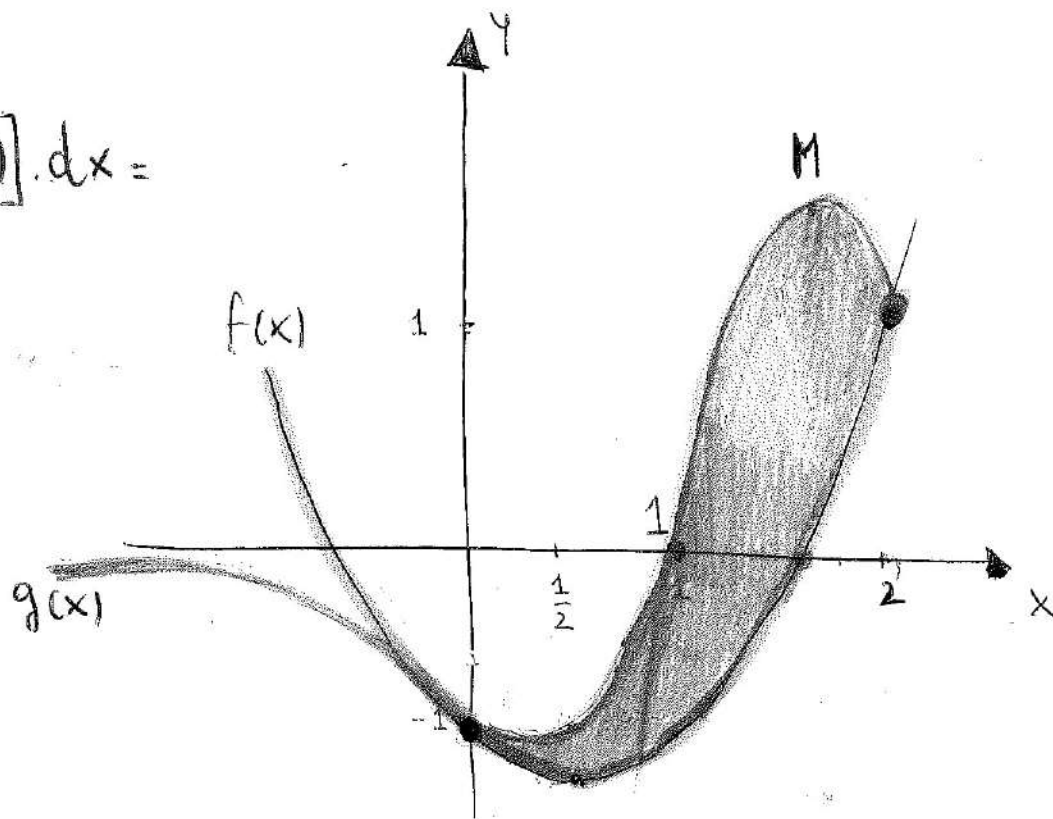
$$f'(x) = 2x - 1 \quad \text{e} \quad g'(x) = e^{2x - x^2} (-2x^2 + 4x - 1)$$

$$f'(0) = -1 \quad g'(0) = e^0 (-1) = -1.$$

$\Rightarrow m_f = m_g$. allora le due funzioni sono tangenti nel punto $B(0, -1)$.

Per determinare l'area della regione piana S delimitata dai grafici di f e g , ci ricordiamo che le due funzioni si incontrano in $B(0, -1)$ e $A(2, 1)$. Allora calcolo l'area con l'integrale.

$$\int_0^2 [g(x) - f(x)] \cdot dx =$$



$$= \int_0^2 [(x-1)e^{2x-x^2} - x^2 + x + 1] dx =$$

$$= \int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2} dx + \int_0^2 (-x^2 + x + 1) dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^2 (-2x+2)e^{2x-x^2} dx + \int_0^2 (-x^2 + x + 1) dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[e^{2x-x^2} \right]_0^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_0^2 =$$

$$= -\frac{1}{2} [1 - 1] + \left[-\frac{8}{3} + 2 + 2 = 0 \right] = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Area} = \frac{4}{3}.$$

3) In assenza di correnti di spostamento, la circolazione di $\vec{B}$ è data dalla legge di Ampere

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i$$

dove C è la linea lungo la quale è eseguita la circolazione mentre i è la somma algebrica delle correnti concatenate.

Osservando che

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4} ; \quad g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{\frac{3}{4}} \approx 1,06$$

si evince che solo P_1 e P_2 sono interne alla regione S e dunque solo i_1 e i_2 sono concatenate al contorno C di S :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (i_1 + i_2)$$

↑
somma
algebrica

Se anche i_2 è entrante nel piano Oxy ,
le intensità i_1 e i_2 si sommano, se è uscente
si sottraggono.

4) La rotazione delle spire produce una variazione
del flusso di $\vec{B}$ attraverso S , che genera
una f.e.m. indotta $\mathcal{E}$ data dalla legge di

Faraday - Neumann:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi(\vec{B})}{dt} \quad (1)$$

Usando la 1^a legge di Ohm ($\mathcal{E} = Ri$) nella
(1) e isolando i , otteniamo la corrente
indotta:

$$i = - \frac{1}{R} \frac{d\phi(\vec{B})}{dt} \quad (2)$$

Poiché $\vec{B}$ è uniforme e S è piana:

$$\phi_s(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \sigma$$

dove σ è l'angolo compreso tra $\vec{B}$ e il vettore superficie $\vec{S}$. La (2) diventa

$$i = - \frac{1}{R} \frac{d(BS \cos \sigma)}{dt} \quad (3)$$

I moduli B e S sono costanti, mentre σ dipende dal tempo secondo la legge oraria

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \omega t \quad (4)$$

dove σ è espresso in radianti e $\sigma_0 = 0$ perché all'istante $t=0$ $\vec{B}$ e $\vec{S}$ sono allineati.

Sostituendo la (4) nella (3):

$$i(t) = - \frac{BS}{R} \frac{d(\cos \omega t)}{dt}$$

$$i(t) = + \frac{BS\omega}{R} \sin \omega t$$

Si noti che $i(t)$ ha un andamento oscillante nel tempo del tipo

$$i = i_0 \sin(\omega t)$$

$$\text{con } i_0 = \frac{BS\omega}{R} \quad (\text{ampiezza di oscillazione})$$

Ricordando che $i_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ A}$ e isolando ω :

$$\omega = \frac{R i_0}{BS} = \boxed{5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}}$$

PROBLEMA 2

1) a e t devono essere omogenei per poterli sommare (vedi denominatore), dunque a è misurato in secondi.

Per trovare le unità di misura di k basta scrivere la formula inversa:

$$k = \frac{B \sqrt{(t^2 + a^2)^3}}{t \cdot r} \Rightarrow [k] = \frac{T \cdot s^3}{s \cdot m} = \boxed{\frac{T \cdot s^2}{m}}$$

Il campo magnetico $\vec{B}$ è generato dal campo elettrico $\vec{E}$ variabile nel tempo, e quindi dalla corrente di spostamento

$$i_s = \epsilon_0 \frac{d\phi_{sc}(\vec{E})}{dt} \quad (1)$$

dove $S(c)$ è una superficie che ha per bordo la linea c (vedi figura nel testo del problema)

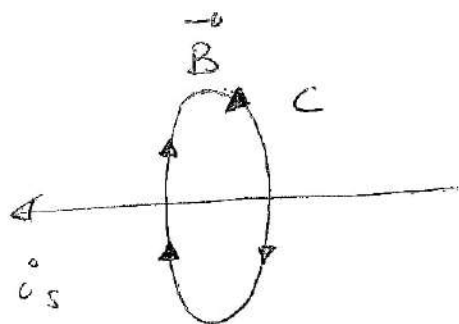
In particolare, la circolazione di $\vec{B}$ lungo la linea C è data dalla legge di Ampere-Maxwell

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (i_c + i_s) \quad (2)$$

dove i_c sono le correnti concatenate (in questo caso, assenti se si sceglie la superficie piana S che ha per bordo C) mentre i_s è la corrente di spostamento data dalla (1).

Trascurando gli effetti di bordo, il campo $\vec{E}$ all'interno del condensatore è perpendicolare alle armature e ha verso diretto dall'armatura con potenziale maggiore a quella con potenziale minore. Come nel caso del filo rettilineo percorso da corrente, le linee del campo $\vec{B}$ sono circolari e concentriche all'asse delle armature. Il verso di rotazione di $\vec{B}$ è dato dalla regola della mano destra: il pollice nel verso di i_s (che se il campo $\vec{E}$ sta aumentando, va dall'armatura positiva a quella negativa) e la rotazione delle

altre dita da il verso di $\vec{B}$



circuitalione

$$2) \quad \oint_C (\vec{B}) = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

Lungo la linea C , $\vec{B}$ è parallelo e concorde a $d\vec{\ell}$. Inoltre, per simmetria, il campo $\vec{B}$ ha lo stesso modulo in tutti i punti della linea. Dunque

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \stackrel{\vec{B} \parallel d\vec{\ell}}{=} \oint_C B d\ell \stackrel{B = \text{cost}}{=} B \oint_C d\ell = B 2\pi r \quad (3)$$

In assenza di correnti concatenate, la (2) diventa

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_s \quad (4)$$

Sostituendo la (1) e la (3) nella (4):

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_{S(e)}(\vec{E})}{dt}$$

Isolando la derivata di $\phi(\vec{E})$ e ricordando l'andamento di $\vec{B}$ rispetto al tempo fornito nel testo del problema:

$$\frac{d\phi(\vec{E})}{dt} = \frac{2\pi r}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} r \quad (5)$$

Integriamo la (5) da $t=0$ a un istante t generico, ricordando che la d.d.p (e dunque $\vec{E}$) è nulla a $t=0$:

$$\int_0^t \frac{d\phi(\vec{E})}{dt'} dt' = \frac{2\pi r^2 k}{\mu_0 \epsilon_0} \int_0^t t' (t'^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} dt'$$

$$\int_{\phi_0}^{\phi_t} d(\phi(\vec{E})) = \frac{\pi r^2 k}{\mu_0 \epsilon_0} \int_0^t \overset{f'(x)}{2t'} \left(\overset{f(x)}{t'^2 + a^2} \right)^{-\frac{3}{2}} dt'$$

$$\phi(\vec{E}(t)) - \phi(\vec{E}(0)) = \frac{\pi r^2 k}{\mu_0 \epsilon_0} \left[\frac{(t'^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^t$$

$$\phi(\vec{E}) = \frac{2\pi r^2 k}{\mu_0 \epsilon_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right) \quad (6)$$

come volevari dimostrare.

Poiché $\vec{E}$ è uniforme all'interno del condensatore e perpendicolare alla superficie piana che ha per bordo C , il flusso $\phi(\vec{E})$ può essere scritto come

$$\phi(\vec{E}) = ES = E\pi r^2$$

e, ricordando che all'interno del condensatore

$$E = \frac{\Delta V}{d} \quad \text{dove } d \text{ è la distanza tra le armature,}$$

otteniamo

$$\phi(\vec{E}) = \frac{\Delta V}{d} \pi r^2$$

Sostituendo nella (6) e isolando ΔV

$$\Delta V = \frac{2kd}{\mu_0 \epsilon_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right)$$

$$B(t \rightarrow \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{k t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} r \right) =$$

$$= k r \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{t^3 \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{t^2}\right)^3}} \right) =$$

$$= k r \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t^2 \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{t^2}\right)^3}} \right) = 0$$

Il campo $\vec{B}$ si annulla perché, come si evince dalle (6),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(E) = \frac{2\pi r^2 k}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{1}{a} = \text{costante}$$

e quindi

$$i_s = \epsilon_0 \frac{d\phi(\vec{E})}{dt} = 0$$

In assenza di corrente di spostamento, la circolazione di $\vec{B}$ risulta nulla lungo qualsiasi linea ϵ interna al condensatore e, conseguentemente, il campo $\vec{B}$ stesso è essere nullo.

$$3) \quad f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$$

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}$$

Per mostrare che $F(t)$ è la primitiva di f dimostriamo che $F'(t) = f(t)$.
Allora calcoliamo

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\frac{1}{2} \cdot 2t \cdot (t^2+a^2)^{-\frac{3}{2}} + 0 = \\ &= -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} \end{aligned}$$

Per dimostrare che il grafico di F passa per l'origine, calcoliamo $F(0)$:

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{0+a^2}} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0.$$

$\Rightarrow$ il grafico di F passa per $(0;0)$.

Dato che $t^2+a^2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R}$. Quindi $D = (-\infty, +\infty)$. Studiamo le simmetrie:

$$F(-t) = \frac{1}{\sqrt{(-t)^2+a^2}} - \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a} = F(t).$$

F è quindi pari.

Calcoliamo i limiti:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{\infty} \right) - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{\infty} \right) - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a}$$

Allora dato che $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} F(t) = c = -\frac{1}{a}$, la funzione ammette asintoto orizzontale $y = -\frac{1}{a}$.

Abbiamo già osservato che la funzione passa per l'origine degli assi. Studiamone ora il segno:

$$\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a} > 0$$

$$\frac{a - \sqrt{t^2+a^2}}{a\sqrt{t^2+a^2}} > 0$$

$$a - \sqrt{t^2+a^2} > -a$$

$$\sqrt{t^2+a^2} < a$$

$$t^2+a^2 < a^2$$

$$t^2 < 0 \text{ impossibile.}$$

$$\therefore a > 0 \text{ per definizione}$$

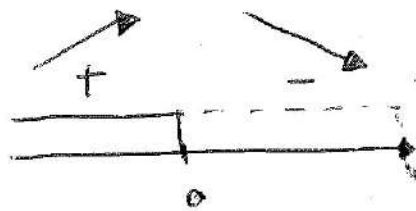
$$\sqrt{t^2+a^2} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

LA FUNZIONE E' QUINDI
SEMPRE NEGATIVA PERCHE'
HA NUMERATORE SEMPRE NEGATIVO E DENOMINATORE SEMPRE POSITIVO.

Abbiamo già calcolato la derivata

$$F'(t) = -\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}^3} > 0$$

$$-t > 0 \quad \boxed{t < 0}$$



$$\sqrt{t^2+a^2}^3 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$F(t)$ CRESCE SE $t < 0$

$F(t)$ DECRESCe SE $t > 0$.

ALLORA per $t=0$ HO UN MASSIMO.

$$M(0;0).$$

calcoliamo ora la derivata seconda

$$F''(t) = \frac{-(\sqrt{t^2+a^2}^3) + t \cdot \frac{3}{2} \cdot 2t \cdot \sqrt{t^2+a^2}}{(t^2+a^2)^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{t^2+a^2} [-(t^2+a^2) + 3t^2]}{(t^2+a^2)^3} = \frac{\sqrt{t^2+a^2} (2t^2-a^2)}{(t^2+a^2)^3}$$

$$F''(t) > 0 \quad \frac{\sqrt{t^2+a^2} (2t^2-a^2)}{(t^2+a^2)^3} > 0$$

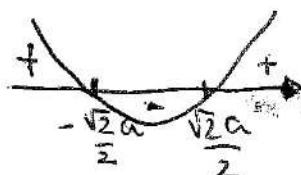
$$\sqrt{t^2+a^2} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(t^2+a^2)^3 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$2t^2 - a^2 > 0$$

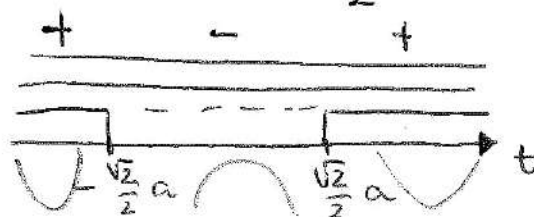
$$t^2 > \frac{a^2}{2}$$

$$t^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow t = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}a}{2}$$



$$t < -\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$t > \frac{\sqrt{2}}{2}a$$



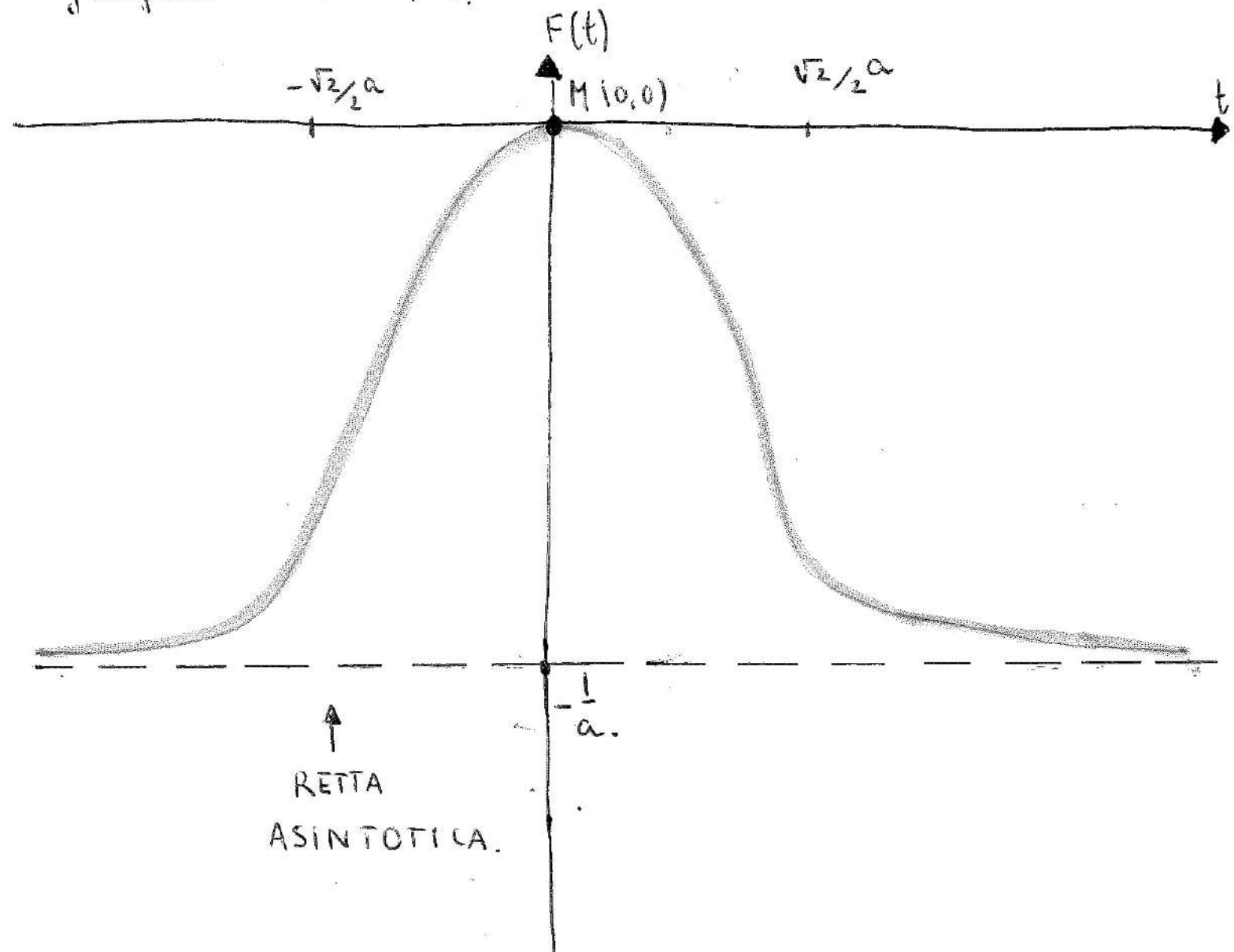
Proviamo allora un cambio di concavità e convessità in $t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} a$ che risultano due punti di flesso.

Per calcolare la pendenza della retta tangente al grafico in questi punti, calcolo:

$$m_{F_1} = F' \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \right) = - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} a}{\sqrt{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \right)^4 + a^4 \right)^3}} = - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} a}{\sqrt{\left(\frac{3}{2} a^4 \right)^3}} = - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} a}{\frac{3}{2} a^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}} = - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2} = - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}{3 a^2} = - \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{3 a^2} = - \frac{\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}}{3 a^2} = - \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{3 a^2} = - \frac{\sqrt{6}}{9 a^2}$$

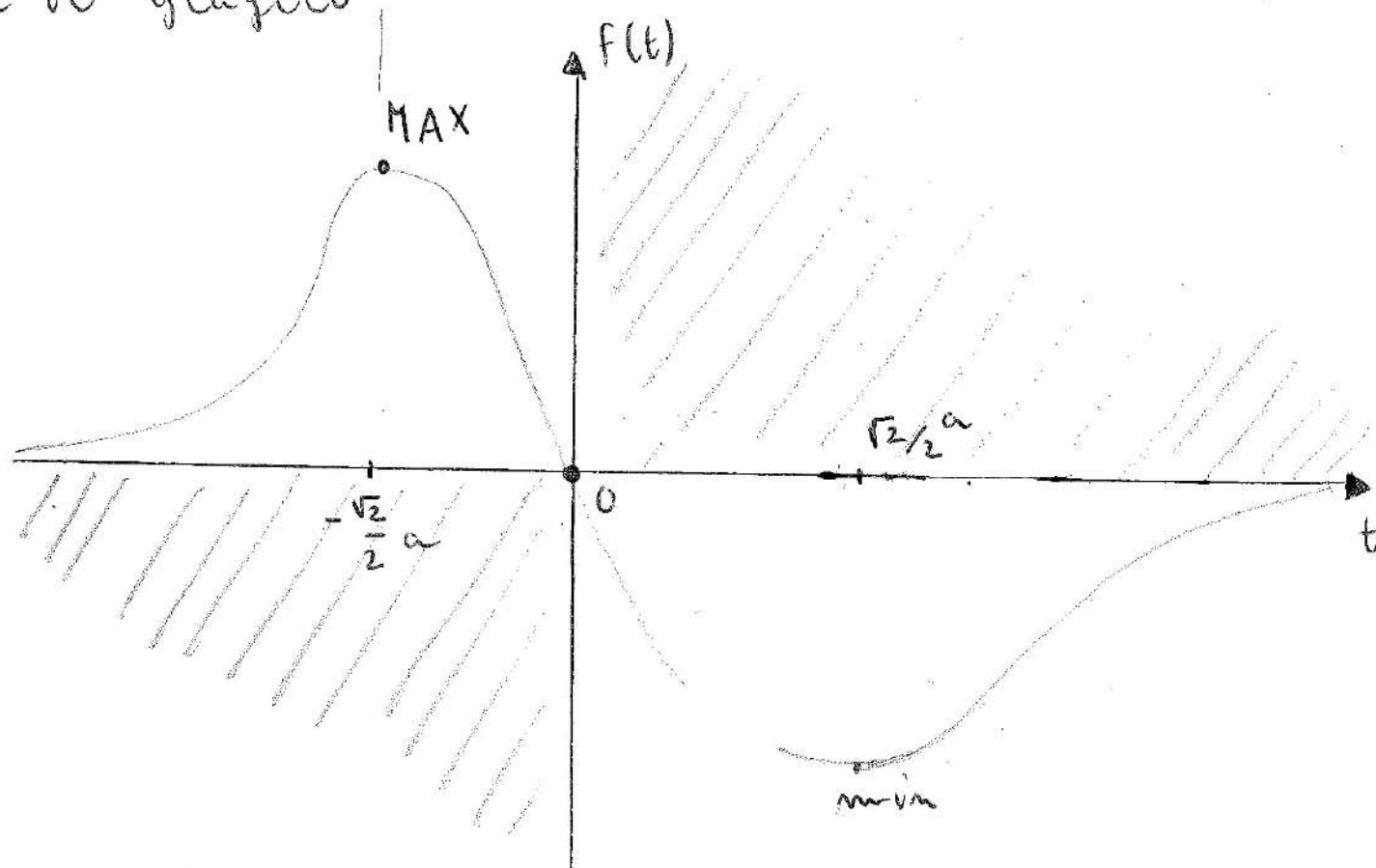
$$m_{F_2} = F' \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} a \right) = + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} a}{\sqrt{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \right)^4 + a^4 \right)^3}} = \frac{2}{3\sqrt{3} a^2}$$

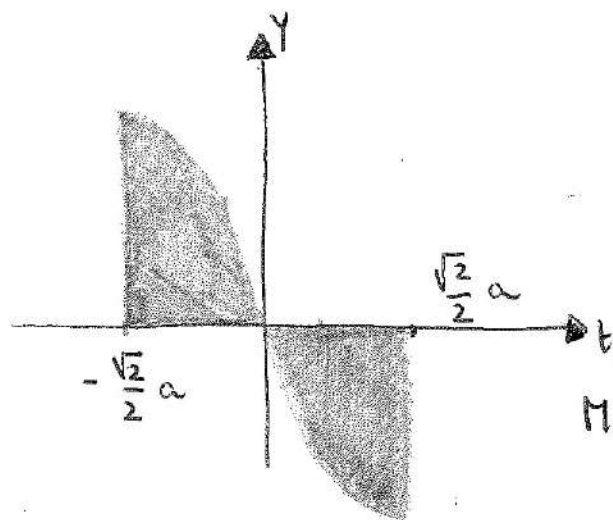
grafico di F :



4) Per tracciare f a partire da F posso notare che, essendo $F'(t) = f(t)$, allora i punti critici di F (ovvero $M(0;0)$) sono le intersezioni di f con l'asse x ; quindi il grafico di f passa per $(0,0)$. Inoltre dati gli intervalli di crescita e decrescenza di F possiamo affermare che f è positiva per $t < 0$ e negativa per $t > 0$. Inoltre, controllando F'' , si può affermare che f cresce per $t < -\frac{\sqrt{2}}{2}a$ e per $t > \frac{\sqrt{2}}{2}a$ e f decresce per $-\frac{\sqrt{2}}{2}a < t < \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Quindi $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}a$ è ascissa di ~~diminuzione~~ massimo per F , mentre $t = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ è ascissa di ~~diminuzione~~ minimo. Possiamo allora tracciare il grafico





Per calcolare l'area, calco-

liamo

$$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^0 f(t) dt + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} f(t) dt$$

MA PER QUESTIONI DI SIMMETRIA

L'AREA è uguale: $2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} -t [t^2 + a^2]^{-\frac{3}{2}} dt = - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} 2t (t^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} dt$

$$= - \left[\frac{(t^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = + 2 \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}a^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2}} \right] =$$

$$= + 2 \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}a} - \frac{1}{a} \right) = + 2 \left(\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{6}a} - \frac{1}{a} \right) \left(\frac{1}{a} - \frac{\sqrt{6}}{3a} \right) =$$

l'area è negativa perché la funzione sta sotto l'asse t. $\rightarrow$ prendo il valore assoluto $\rightarrow$ Area = $+\frac{2}{a} \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$

Fissato però $b > 0$, calcolo

$$\int_{-b}^b f(t) dt = \int_{-b}^b -t [t^2 + a^2]^{-\frac{3}{2}} dt = - \frac{1}{2} \left[\frac{(t^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_{-b}^b =$$

$$= - \left(\frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2}} \right) = 0.$$

QUESITO 1.

$$f(x) = \frac{P(x)}{x^2 + d} \quad d \in \mathbb{R}$$

$P(x)$: polinomio

$$P_1(0; 0) \quad P_2\left(\frac{12}{5}; 0\right)$$

$x=3$ ASINTOTO VERTICALE

$x=-3$ ASINTOTO VERTICALE

$y=5$ ASINTOTO ORIZZONTALE

Dato che $x=\pm 3$ sono asintoti verticali, cioè punti di discontinuità di 2^a specie per f , allora

$$(\pm 3)^2 + d = 0$$

$$d = -9$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{P(x)}{x^2 - 9}$$

Il fatto che esista asintoto orizzontale implica che

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 5$$

Questo è possibile $\Leftrightarrow P(x) = 5x^2 + bx + c$.
Allora

$$f(x) = \frac{5x^2 + bx + c}{x^2 - 9}$$

Sapendo che $f(0) = 0$ allora $\frac{0+0+c}{-9} = 0 \quad \boxed{c=0}$

inoltre

$$f\left(\frac{12}{5}\right) = 0 \Rightarrow \frac{5 \cdot \frac{144}{25} + b \cdot \frac{12}{5}}{\frac{144}{25} - 9} = 0 \quad \frac{\frac{144 + 12b}{5}}{\frac{144 - 225}{25}} = 0$$

$$-\frac{(144+12b)5}{81} = 0 \Rightarrow 12b = -144$$

$$b = -12.$$

ALLORA $f(x) = \frac{5x^2 - 12x}{x^2 - 9}$

PER calcolare massimi e minimi, calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{(10x-12)(x^2-9) - (5x^2-12x)2x}{(x^2-9)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{10x^3} - 90x - 12x^2 + 108 - \cancel{10x^3} + 24x^2}{(x^2-9)^2} =$$

$$= \frac{12x^2 - 90x + 108}{(x^2-9)^2} > 0.$$

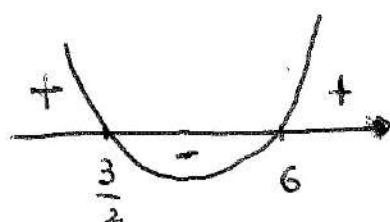
$$12x^2 - 90x + 108 > 0$$

$$4x^2 - 30x + 36 > 0$$

$$2x^2 - 15x + 18 > 0$$

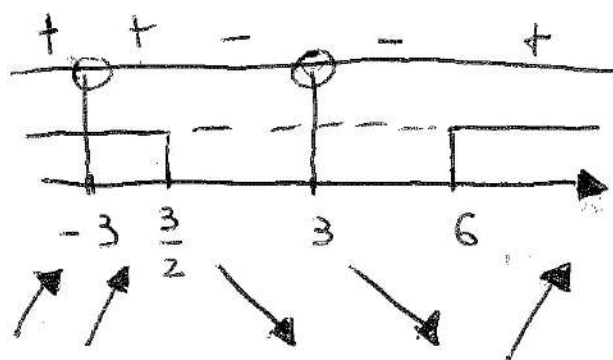
$$\Delta = 225 - 144 = 81$$

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm 9}{4} \quad \begin{matrix} \nearrow x_1 = \frac{3}{2} \\ \searrow x_2 = 6. \end{matrix}$$



$$x < \frac{3}{2} \cup x > 6.$$

$$(x^2-9)^2 > 0 \quad \forall x \neq \pm 3$$



$$x = \frac{3}{2} \text{ max} \quad M\left(\frac{3}{2}; \frac{\frac{45}{4} - 18}{\frac{9}{4} - 9}\right) = \left(\frac{3}{2}; +\frac{27}{27}\right) = \left(\frac{3}{2}; 1\right).$$

$$x = 6 \text{ min}$$

$$m \left(6; \frac{5 \cdot 36 - 72}{36 - 9} \right) = \left(6; \frac{108}{27} \right) = (6; 4)$$

QUESITO 2.

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1}$$

Boniamo scrivere

$$g(x) = x [1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2018}]$$

Allora $g(x) = 0 \Rightarrow x [1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2018}] = 0$

per il PRINCIPIO DI ANNULLAMENTO
DEL PRODOTTO

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ \Downarrow \\ \boxed{x_0 = 0} \end{aligned}$$

$$1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2018} = 0$$

impossibile

perché ho una somma di quadrati (sempre positivi), che al minimo vale 0, sommata ad 1.

Quindi il valore minimo del polinomio è 1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{1,1^x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

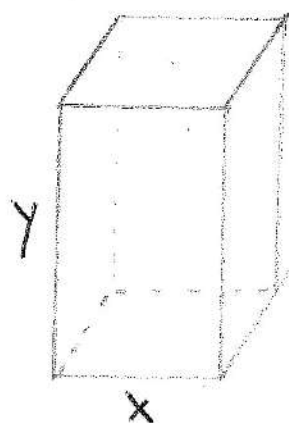
FORMA INDETERMINATA.

Batteria applicando DE L'HÔPITAL per più e più volte si può dimostrare che l'esponenziale con base maggiore di 1 è sempre più

veloce ad arrivare ad ∞ di qualsiasi polinomio. Quindi, quando il numeratore è ancora un valore finito, il denominatore è già all'infinito. Di conseguenza, ricordando che nei limiti $\frac{M}{\infty} = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{1,1^x} = 0.$$

QUESITO 3.



SUPERFICIE DI BASE

$$S_b = x \cdot x = x^2$$

SUPERFICIE LATERALE

$$S_e = (4x) \cdot y$$

perimetro
di
base

altezza

SUPERFICIE TOTALE

$$S = 2x^2 + 4xy.$$

$$y = \frac{S - 2x^2}{4x}$$

LA SOMMA DI TUTTI GLI SPIGOLI SARA' ALLORA LA FUNZIONE

$$f(x) = 8x + 4y = 8x + 4 \cdot \frac{S - 2x^2}{4x} =$$

$$= 8x + \frac{S - 2x^2}{x} = \frac{8x^2 - 2x^2 + S}{x} = \frac{6x^2 + S}{x}$$

cerchiamo il minimo.
Calcoliamo $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(12x)x - 6x^2 - S}{x^2} = \frac{12x^2 - 6x^2 - S}{x^2} = \frac{6x^2 - S}{x^2}$$

STUDIAMO $f'(x) > 0$

$$\frac{6x^2 - S}{x^2} \geq 0$$

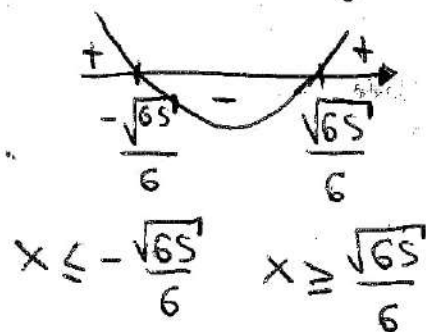
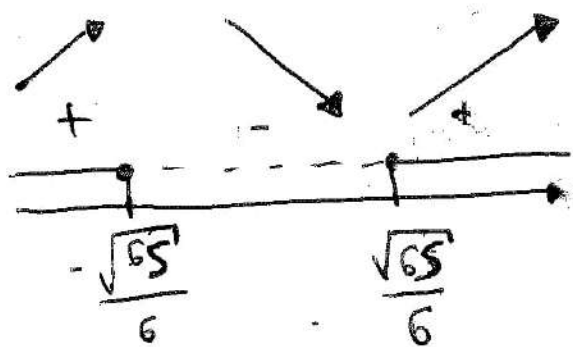
$$x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

$$6x^2 - S \geq 0 \quad 6x^2 \geq S$$

$$x^2 \geq \frac{S}{6}$$

$$x^2 = \frac{S}{6} \quad x = \pm \sqrt{\frac{S}{6}}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{6S}}{6}$$



$$x = \frac{\sqrt{6S}}{6} \text{ minimo. } \Rightarrow y = \frac{S - \frac{S}{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{6S}}{6}} = \frac{\frac{2S}{3}}{\frac{2\sqrt{6S}}{6}} = \frac{2S}{2\sqrt{6S}} = \frac{\sqrt{6S}}{6}$$

TRA TUTTI I PARALLELEPIPEDI RETTANGOLI DI SUPERFICIE TOTALE S , QUELLO CHE HA ^{MINIMA} SOMMA DEGLI SPIGOLO $\sqrt{E}$ È QUELLO CON SPIGOLO DI BASE DI $\frac{\sqrt{6S}}{6}$ E ALTEZZA $\frac{\sqrt{6S}}{6}$,

OVVERO UN CUBO DI SPIGOLO $\frac{\sqrt{6S}}{6}$.

QUESITO 4.

$$A(2, 0, -1)$$

$$B(-2, 2, 1)$$

$$\overline{PA} = \sqrt{2} \overline{PB}$$

Consideriamo il punto generico dello spazio

$$P(x, y, z)$$

Calcolo

$$\overline{PA} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$$

Utilizzo la relazione

$$\overline{PA} = \sqrt{2} \overline{PB}$$

$$\left[\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2} \right]^2 = \left[\sqrt{2} \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} \right]^2$$

$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2 \left[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \right]$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 + 2z + 1 = 2x^2 + 8x + 8 + 2y^2 - 8y + 8 + 2z^2 - 4z + 2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0.$$

MA QUESTA È L'EQUAZIONE DI UNA SUPERFICIE
SFERICA DI CENTRO $C(-6, 4, 3)$ E RAGGIO

$$r = \sqrt{36 + 16 + 9 - 13} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

Per verificare che $T(-10, 8, 7)$ appartiene alla
superficie, controlliamo se ne soddisfa l'
equazione:

$$(-10)^2 + (8)^2 + (7)^2 + 12(-10) - 8(8) - 6(7) + 13 = 0$$

$$100 + \cancel{64} + 49 - 120 - \cancel{64} - 42 + 13 = 0$$

$$162 - 162 = 0$$

$0 = 0$. VERIFICATO.

T appartiene alla superficie.

Per trovare l'equazione del piano tangente utilizzo la formula di SDOPPIAMENTO:

$$X \cdot X_0 + Y \cdot Y_0 + Z \cdot Z_0 + a \left(\frac{X+X_0}{2} \right) + b \left(\frac{Y+Y_0}{2} \right) + c \left(\frac{Z+Z_0}{2} \right) + d = 0.$$

$$X(-10) + Y(8) + Z(7) + 12 \left(\frac{X-10}{2} \right) - 8 \left(\frac{Y+8}{2} \right) - 6 \left(\frac{Z+7}{2} \right) + 13 = 0$$

$$-10X + 8Y + 7Z + 6X - 60 - 4Y - \cancel{32} - 3Z - 21 + 13 = 0$$

$$-4X + 4Y + 4Z - 100 = 0$$

$$\boxed{X - Y - Z + 25 = 0} \quad \begin{array}{l} \text{EQUAZIONE} \\ \text{TANGENTE.} \end{array} \quad \text{PIANO}$$

QUESITO 5.

X_i : n° uscito dal lancio dell'i-esimo dado:

- $P(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 5)$ • affinché avvenga questo evento è necessario che 3 dei dadi abbiano la faccia 1 e il rimanente la faccia 1 oppure 2.

Ovvero

$$P(X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 1) + P(X_1 = X_2 = X_3 = 1, X_4 = 2) +$$

$$+ P(X_1 = X_2 = X_4 = 1, X_3 = 2) + P(X_1 = X_3 = X_4 = 1, X_2 = 2) + P(X_2 = X_3 = X_4 = 1, X_1 = 2)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6^4} = \frac{5}{1296}$$

$$P(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 5) = \frac{5}{1296}.$$

- La probabilità che il prodotto sia multiplo di 3 coincide con la probabilità che almeno uno dei dadi esca la faccia 3 oppure la faccia 6. Ma questo evento è ~~ob~~ l'evento contrario all'evento in cui non esca in nessuno dei dadi 3 e 6 ovvero per i quattro dadi escano solo 1, 2, 4, 5. Dunque la probabilità cercata sarà

$$1 - P(X_1, X_2, X_3, X_4 = \{1, 2, 4, 5\}) = 1 - \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}.$$

- La probabilità che il massimo numero sia 4 si può calcolare tramite la formula

$$P = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$$

i casi favorevoli sono dati da tutte le disposizioni delle 4 facce con numeri più piccoli di 4 nei quattro dadi ma sottraendo i casi in cui il numero 4 non si presenta (3^4). Quindi

$$\text{CASI FAVOREVOLI: } 4^4 - 3^4$$

$$\text{CASI POSSIBILI: } 6^4$$

$$P = \frac{4^4 - 3^4}{6^4} = \frac{175}{1296}.$$

QUESITO 6

$$R = 4 \cdot 10^{-3} \Omega$$

$$S = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

La corrente indotta i ha verso tale da produrre un campo indotto $\vec{B}_{\text{ind}}$ che si oppone alla variazione del flusso del campo esterno $\vec{B}$ attraverso la spira

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

$$\rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R} = - \frac{1}{R} \frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

$$a) \quad \bar{i} = - \frac{1}{R} \frac{\Delta\phi(B)}{\Delta t} = - \frac{1}{R} \frac{\phi(B_f) - \phi(B_i)}{t_f - t_i} =$$

$$= - \frac{S(B_f - B_i)}{R(t_f - t_i)} = +5 \cdot 10^{-2} \text{ A}$$

$$b) \quad \bar{i} = -0,15 \text{ A}$$

$$c) \quad \bar{i} = +3 \cdot 10^{-2} \text{ A}$$

QUESITO 7

$t = 2 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ tempo misurato nel sistema di riferimento in quiete S (laboratorio)

$x = 0,25 \text{ m}$ posizione in S all'istante t

$v = 0,8 c$ velocità di S' (navicella) rispetto a S

1) u_x : velocità particella rispetto a $S \rightarrow u_x = \frac{x}{t} = \boxed{0,417 c}$
 u'_x : velocità particella rispetto a S'

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} = \boxed{-0,575 c}$$

2) Delle trasformazioni di Lorentz:

$$t' = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)} t = \boxed{2,22 \cdot 10^{-9} \text{ s}}$$

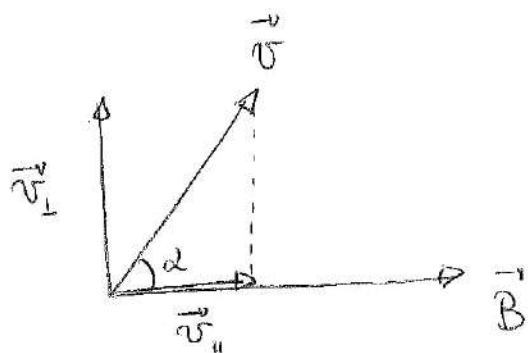
$$x' = u'_x t' = \boxed{0,383 \text{ m}}$$

QUESITO 8

$$B = 1 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

$$\Delta x = 0,381 \text{ m}$$

$$r = 0,105 \text{ m}$$



$$F_{\text{centr}} = F_{\text{Lorentz}}$$

$$m \frac{v_{\perp}^2}{r} = q v_{\perp} B$$

$$1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$v_{\perp} = \frac{q B r}{m} = 1,006 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v_{\perp}} = 6,56 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

$$v_{\parallel} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{T} = 5,81 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2} = \boxed{1,16 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$\tan \alpha = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}}\right) = \boxed{60^\circ}$$